Gibanje

- Gibanje je promjena položaja tijela u odnosu na okolinu.
- Jednostavniji slučajevi: jednoliko – konstantna brzina; jednoliko ubrzano – konstantna akceleracija
- Vertikalne i horizontalne komponente gibanja u ravnini možemo promatrati nezavisno.
- Radijus vektor položaja $\vec{s}$, brzina $\vec{v}$ i akceleracija $\vec{a}$ povezani su relacijama:

$\boldsymbol{\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}}$	$\boldsymbol{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$

- Relacije, koje opisuju ovisnost među fizikalnim veličinama, (fizikalni zakoni) ne ovise o izboru koordinatnog sustava, ali iznosi izmjerenih veličina ne moraju biti jednaki u različitim sustavima, npr:
  - Mjerimo brzinu automobila sa tla (1. referentni sustav) i mjerimo iz nekog drugog automobila (2. sustav).
  - U oba sustava vrijede isti fizikalni zakoni $\left(\text{npr.}\,\vec{v}=\frac{d\vec{s}}{dt}\ \text{i}\ \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$, a fizikalne veličine (npr. brzinu automobila) mjerimo u odnosu na naš referentni sustav pa dobivamo najčešće različite vrijednosti.
- Ako se radi o 1D gibanju ili promatramo samo 1 komponentu gibanja, možemo pisati relacije bez vektora.
  - Oznake:
    - pomak $\Delta x = x_2 - x_1$
    - srednja brzina $\bar{v}$
    - srednja akceleracija $\bar{a}$
  - Ako se brzina (nagib $x-t$ grafa) zanemarivo mijenja od početnog trenutka $\mathrm{t_P}$ do konačnog trenutka $\mathrm{t_K}$, sekanta je približno tangenta pa je

$$v(t_\mathrm{P}) \approx \frac{x_\mathrm{K}-x_\mathrm{P}}{t_\mathrm{K}-t_\mathrm{P}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$$

  - Ako se akceleracija (nagib $v-t$ grafa) zanemarivo mijenja od $\mathrm{t_P}$ do $\mathrm{t_K}$, možemo aproksimirati

$$a(t_\mathrm{P}) \approx \frac{v_\mathrm{K}-v_\mathrm{P}}{t_\mathrm{K}-t_\mathrm{P}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a}$$

- Integriranje je inverzna operacija deriviranju pa je

$$\vec{s} = \int \vec{v}(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \vec{s}_0 \qquad \vec{v} = \int \vec{a}(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \vec{v}_0$$

- Specijalno, ako na tijelo djeluje sila koja se ne mijenja u vremenu, akceleracija $\vec{a}(t) = \overrightarrow{\text{const}} \equiv \vec{a}$ pa vrijedi

$$\vec{a} = \frac{\mathbf{d}\vec{v}}{\mathbf{d}t} \Longrightarrow \int_{t'=0}^{t'=t} \mathrm{d}\vec{v}(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \vec{a}(t)dt$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} \mathrm{d}\vec{v}(t') = \vec{a} \int_{t'=0}^{t'=t} \mathrm{d}t' \Rightarrow \vec{v}(t')\Big|_{t'=0}^{t'=t} = \vec{a}\, t'\Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a} \cdot t - 0$$

$$\vec{v} = \frac{\mathbf{d}\vec{s}}{\mathbf{d}t} \Longrightarrow \int_{t'=0}^{t'=t} \mathrm{d}\vec{s}(t') = \int_{t'=0}^{t'=t} \vec{v}(t')\mathrm{d}t'$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} \mathrm{d}\vec{s}(t') = \int_{t'=0}^{t'=t} [\vec{a} \cdot t' + \vec{v}(0)]\mathrm{d}t' \Rightarrow \vec{s}(t')\Big|_{t'=0}^{t'=t} = \left[\frac{1}{2}\vec{a}\, t'^2 + \vec{v}(0) \cdot t'\right]\Bigg|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\vec{s}(t) - \vec{s}(0) = \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 + \vec{v}(0) \cdot t - 0$$

$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot t + \vec{v}(0)$	$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}(0) \cdot t + \vec{s}(0)$

gdje je $\overrightarrow{v_0} \equiv \vec{v}(0)$ početna brzina, a $\overrightarrow{s_0} \equiv \vec{s}(0)$ početni položaj. Za jednoliko gibanje $\vec{a} = \vec{0}$.

- Analogno prethodnome, ako se radi o jednodimenzionalnom gibanju ili promatramo pojedine komponente gibanja, relacije možemo pisati bez vektora.
- Za gibanja kada akceleracija nije konstantna, možemo odabrati mali vremenski interval Δt na kojem je akceleracija približno konstantna. Tada možemo simulirati bilo koji oblik gibanja na sljedeći način:

Konstante, početni položaj i brzina

$x(0)$ $\quad$ $v_x(0)$

$t = 0\ \mathrm{s}$

$a_x(\mathrm{t})$ poznata

staro vrijeme t, a novo $t + \Delta t$

$t = t + \Delta t$

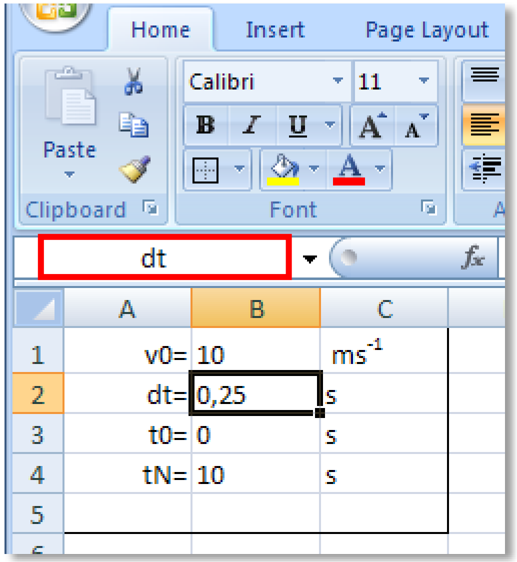
$$x_{\text{novi}} = \frac{1}{2} a_{x\_\text{stara}} \cdot (\Delta t)^2 + v_{x\_\text{stara}} \cdot \Delta t + x_{\text{stari}}$$

$$v_{x\_\text{nova}} = a_{x\_\text{stara}} \cdot \Delta t + v_{x\_\text{stara}}$$

- **E1. SIMULACIJA GIBANJA**: Koristeći simulaciju gibanja http://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man generirajte grafove koji prikazuju položaj, brzinu i akceleraciju čovjeka.
  - Kako je odabran referentni sustav (gdje se nalazi ishodište)?
  - Koja je veza nagib $x - t$ grafa sa vrijednostima prikazanima $v - t$ grafom.
  - Objasnite odnose nagiba $v - t$ grafa sa vrijednostima (iznosima i predznacima) prikazanima $a - t$ grafom.
  - Objasnite odnose površina ispod $v - t$ grafa sa vrijednostima koje prikazuje $x - t$ graf.
  - Objasnite odnose površina ispod $a - t$ grafa sa vrijednostima koje prikazuje $v - t$ graf.
  - Koliko iznosi brzina u trenutcima kada imamo lokalne maksimume na $x - t$ grafu, a kolika kada imamo lokalne minimume?
  - Koliko iznosi akceleracija kada imamo lokalne maksimume brzine, a kolika kad imamo lokalne minimume?
  - Postoji li veza između oblika $x - t$ grafa i predznaka akceleracije?
  - Koliko iznose položaj, brzina i akceleracija za trenutno kreirano gibanje u trenutku $t = 5\ \mathrm{s}$?

E2. JEDNOLIKO GIBANJE: U početnom trenutku brzina tijela iznosi $\overrightarrow{v_0} = 10\hat{\imath}\ \mathrm{ms}^{-1}$. Promotrite tijelo, koje se giba jednoliko od $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ do $t_N = 10\ \mathrm{s}$. Koristite vremenski korak $\Delta t = 0.25\ s$. Koristeći Excel modelirajte dano gibanje općenito, tj. promjenom parametra v_0, t_0, t_N i Δt moraju se automatski mijenjati sljedeći traženi prikazi.

- Izračunajte brzine koristeći zadani vremenski korak.
  - ✓ Zadatak mora biti riješen općenito pa moramo unijeti vrijednosti veličina v_0, t_0, t_N i $\Delta t \equiv dt$ u zasebna polja radi lakšeg mijenjanja njihovih vrijednosti.
  - ✓ Napomene!!!
    - ❖ Pri unosu podataka potrebno je pisati i pripadne mjerne jedinice.
    - ❖ Mjerne jedinice (tekst) NE smiju biti upisane u istoj ćeliji kao i numerička vrijednost jer tada Excel neće razumjeti numerički podatak.
    - ❖ Pri unosu vrijednosti treba obratiti pažnju što je na vašem računalu oznaka za decimalnu točku (. ili ,).
  - ✓ Zadane vrijednosti unesemo u Excel, kao na slici desno.
  - ✓ Napomene:
    - ❖ Excel prilikom kopiranja formula mijenja relativne adrese prema broju stupaca i redaka za koliko smo ju odmaknuli (npr. formula u ćeliji E2 sadrži u svojoj definiciji B1, kopiranjem u F5 pomaknuli smo se za 1 stupac i 3 retka pa se automatski u definiciji mijenja i B1 u C4).
    - ❖ Ako želimo izbjeći mijenjanje prilikom kopiranja formula, kao npr. sa v0 (vrijednost u B1) moramo pisati apsolutnu adresu polja u kojem se nalazi njena vrijednost (u ovom slučaju \$B\$1).
    - ❖ Polju možemo dodijeliti i neku alternativnu adresu pa nju koristiti umjesto apsolutne, npr. označimo polje u kojem je vrijednost od dt (B2) i na mjesto njegove adrese upišimo dt (sada dt ima isto značenje kao \$B\$2).



- ✓ Unesimo alternativne adrese v0, dt, t0, tN za vrijednosti u stupcu B.
- ✓ Unesimo u stupac E vremena od $t_0 = 0$ s do $t_N = 10$ s, koristeći vremenski korak $\Delta t = 0.25\ s$.
  - ❖ Prvo vrijeme jednako je početnom, a svako sljedeće je prethodno + Δt.
  - ❖ Upišemo prvo, drugo i drugo kopiramo povlačenjem kvadratića u donjem desnom kutu sve do 10 s.

E6 =E5+dt

	A	B	C	D	E	F
1	v0=	10	ms^{-1}		t / s	Naredbe iza ! upisane su u stupcu E
2	dt=	0,25	s		0,00	!=t0
3	t0=	0	s		0,25	!=E2+dt
4	tN=	10	s		0,50	!=E3+dt
5					0,75	!=E4+dt
6					1,00	!=E5+dt
7					1,25	!=E6+dt

- ✓ Radi se o jednolikom gibanju ($a(t) = 0$) pa je brzina konstantna, a imamo 1D gibanje pa možemo pisati bez vektora odnosno $v(t) = v_0$.
  - ❖ Unesimo u polje F2 početnu brzinu (upišemo =v0).
  - ❖ Kopiramo ga po svim poljima do retka u kojem je upisano zadnje vrijeme.

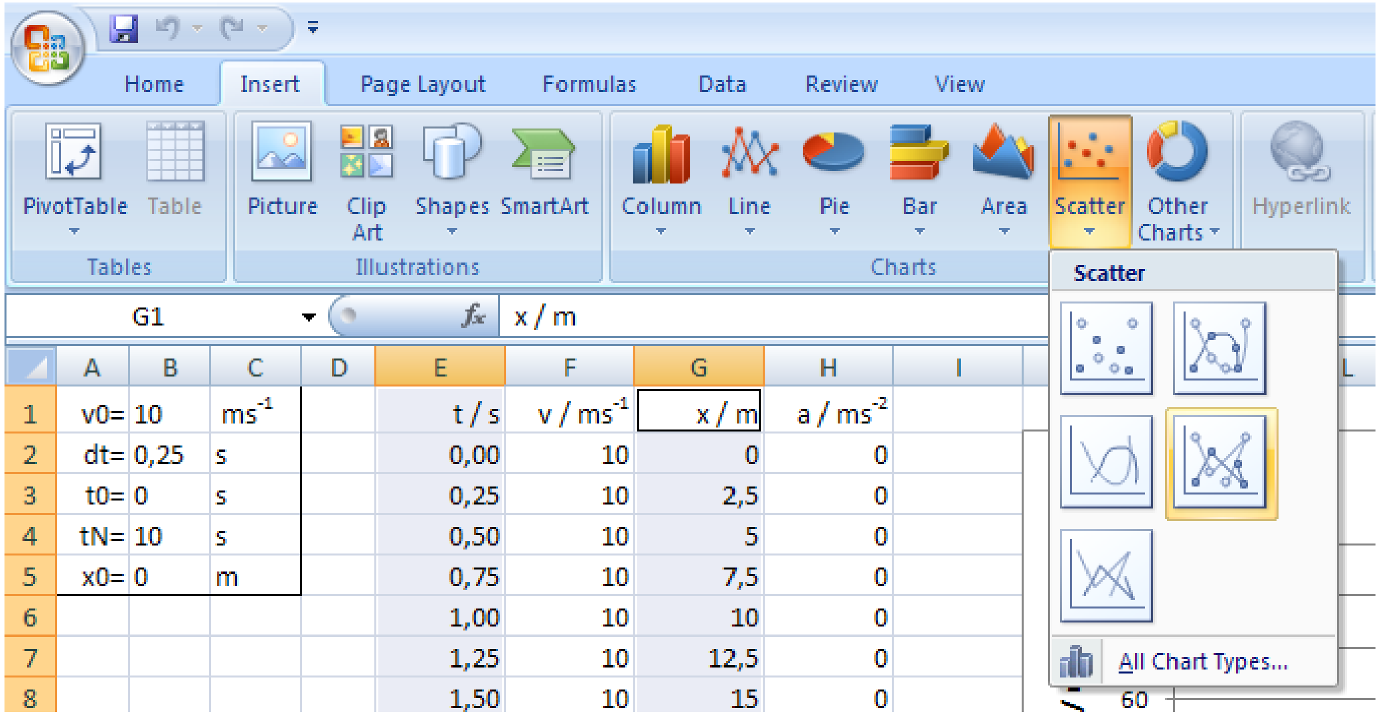
➢ Prikažite grafički kako položaj ovisi o vremenu.

- ✓ Koordinatni sustav biramo proizvoljno. Uzmimo što nam je najjednostavnije, odnosno $x(0\ \mathrm{s}) = 0\ \mathrm{m}$.
  - ❖ Upišimo ovaj početni uvjet u 5. retku u stupce A, B, C.
  - ❖ Imenujmo adresu od B5 sa x0.
- ✓ Upišimo položaje u stupcu G.
  - ❖ Kako bi bilo jasno što je prikazano upišimo u G1 x / m.
  - ❖ U G2 upišimo početni položaj =x0.

- Brzina se uopće ne mijenja u dobivenim vremenskim intervalima pa je sljedeći položaj (G3) =G2+F2*dt.
- G2 kopiramo povlačenjem kvadratića.

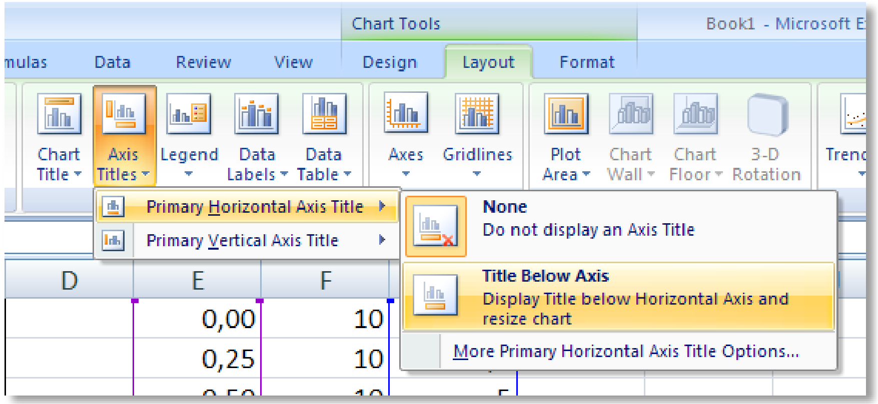
✓ Nacrtajmo x-t graf.

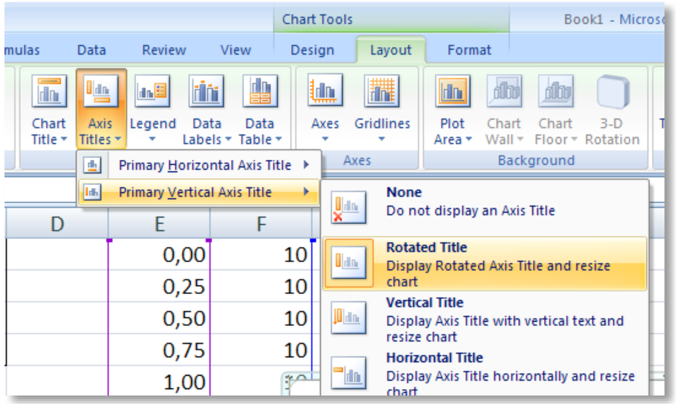
- Označimo podatke koje ćemo prikazati na grafu, tj. držeći tipku Ctrl označimo podatke u stupcima E i G te odaberemo razbacani linijski graf kao na slici (ili Scatter with Smooth Lines)



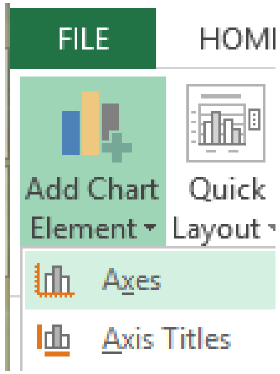
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	v0=	10	ms^{-1}		t / s	v / ms^{-1}	x / m	a / ms^{-2}	
2	dt=	0,25	s		0,00	10	0	0	
3	t0=	0	s		0,25	10	2,5	0	
4	tN=	10	s		0,50	10	5	0	
5	x0=	0	m		0,75	10	7,5	0	
6					1,00	10	10	0	
7					1,25	10	12,5	0	
8					1,50	10	15	0	

- Nove podatke na isti graf dodajemo koristeći izbornik >> Design >> Select Data.
- Imenujmo podatke na koordinatnim osima.

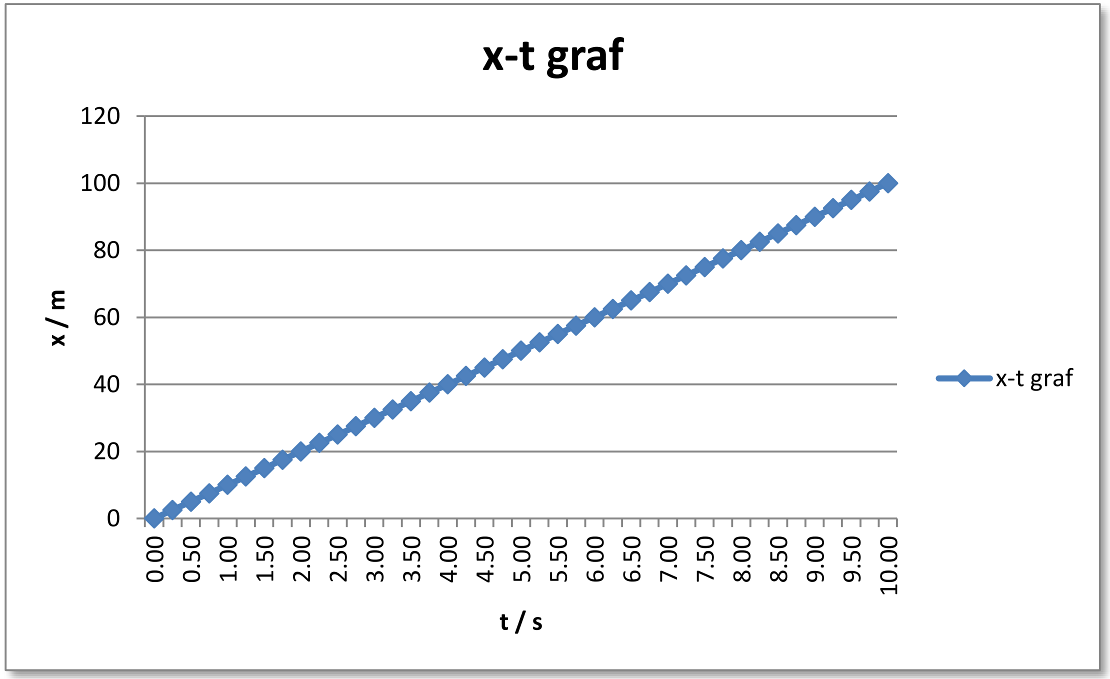




ili



✓ Dobijemo sljedeći x-t graf



➢ Iako znamo: akceleracija je 0, odredite je koristeći vrijednosti brzina i prikažite grafički ovisnost brzine i akceleracije o vremenu.

✓ Akceleraciju računamo koristeći formulu $a(t_\mathrm{P}) = \frac{v_\mathrm{K} - v_\mathrm{P}}{t_\mathrm{K} - t_\mathrm{P}}$ jer se brzina uopće ne mijenja na intervalima.

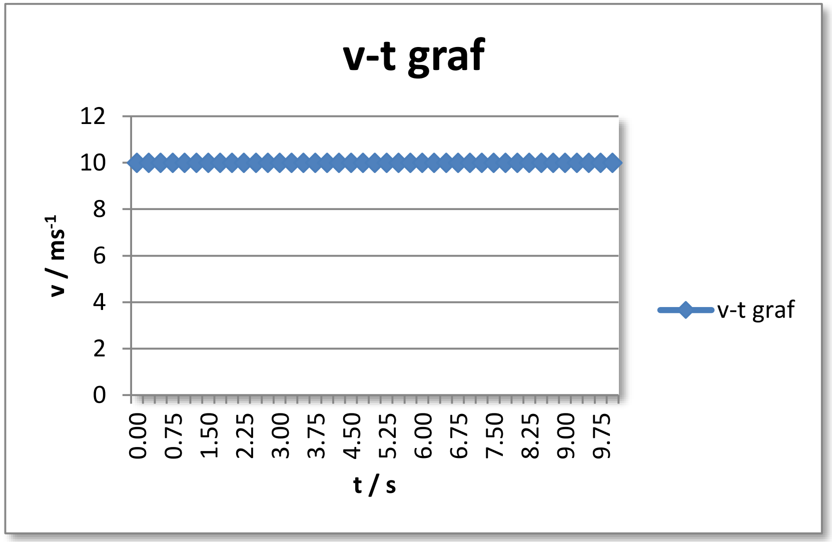
❖ Kako bi bilo jasno što je prikazano upišimo u H1 oznaku veličine i pripadnu mjernu jedinicu a / ms^{-2}.

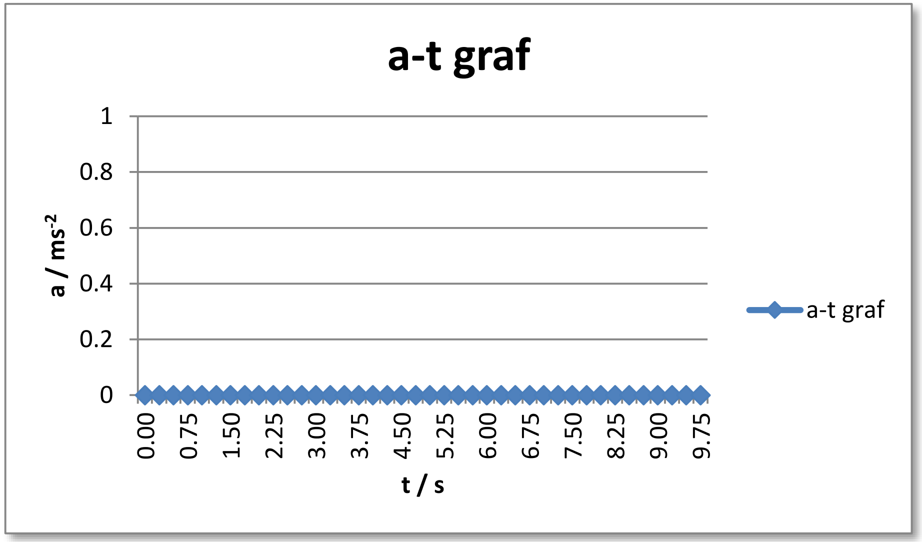
❖ U polje H2 unesemo =(F3-F2)/dt te kopiramo do predzadnjeg vremena i dobijemo 0 u svim trenutcima.

H2 | f_x =(F3-F2)/dt

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	v0=	10	ms^{-1}		t / s	v / ms^{-1}	x / m	a / ms^{-2}	
2	dt=	0,25	s		0,00	10	0	0	
3	t0=	0	s		0,25	10	2,5	0	
4	tN=	10	s		0,50	10	5	0	
5	x0=	0	m		0,75	10	7,5	0	
6					1,00	10	10	0	

✓ Nacrtamo v-t i a-t graf





- **E3. NEJEDNOLIKO GIBANJE**: Izmjereni su položaji nekog tijela svakih 0.01 s i priloženi u Excel datoteci. Koristeći izmjerene podatke odredite:
  - Kako je odabran referentni sustav (gdje se nalazi ishodište koordinatnog sustava)?
  - Nacrtajte ovisnost položaja i brzine o vremenu na istome grafu.
  - Kako je povezan nagib $x - t$ grafa sa vrijednostima prikazanima $v - t$ grafom.
  - Nacrtajte ovisnost akceleracije i brzine o vremenu na istome grafu.
  - Kako je povezan nagiba $v - t$ grafa sa vrijednostima (iznosima i predznacima) prikazanima $a - t$ grafom.
  - Objasnite odnose površina ispod $v - t$ grafa sa vrijednostima koje prikazuje $x - t$ graf.
  - Objasnite odnose površina ispod $a - t$ grafa sa vrijednostima koje prikazuje $v - t$ graf.
  - Koliko iznosi brzina u trenutcima kada imamo lokalne maksimume na $x - t$ grafu, a kolika kada imamo lokalne minimume?
  - Koliko iznosi akceleracija kada imamo lokalne maksimume brzine, a kolika kad imamo lokalne minimume?
  - Nacrtajte ovisnost akceleracije i položaja o vremenu na istome grafu.
  - Postoji li veza između oblika $x - t$ grafa i predznaka akceleracije?
  - Koliko iznose položaj, brzina i akceleracija u trenutku $t = 2\mathrm{s}$?
    - ✓ Koristimo prethodno definirane relacije

$$v(t_\mathrm{P}) \approx \frac{x_\mathrm{K} - x_\mathrm{P}}{t_\mathrm{K} - t_\mathrm{P}} \qquad\qquad a(t_\mathrm{P}) = \frac{v_\mathrm{K} - v_\mathrm{P}}{t_\mathrm{K} - t_\mathrm{P}}$$

- **E4. NEJEDNOLIKO GIBANJE**: Koristeći akceleracije te početnu brzinu i početni položaj iz zadatka E3 pokušajte reproducirati brzine i položaje te usporedite sa vrijednostima u zadatku E3.
  - ✓ Koristimo shematski prikaz računanja na stranici 2.